

Implicazione e doppia Implicazione

Come abbiamo accennato nell'unità precedente, si ottengono *proposizioni condizionali* quando si usa uno dei due connettivi " $\rightarrow$ " e " $\leftrightarrow$ ", che rappresentano rispettivamente l'operazione di *implicazione* e quella di *doppia implicazione*. Entrambi legano due proposizioni, delle quali quella di sinistra è detta l'*antecedente* e quella di destra è detta il *conseguente*. Nel caso della doppia implicazione, si parla di *proposizioni bicondizionali*.

Le espressioni "se ... allora ..." e "se e solo se ... allora ..."

I termini "antecedente" e "conseguente" vanno intesi in senso logico e non temporale. Spesso, in italiano, l'implicazione semplice (IS) è segnalata da una frase del tipo "se ... allora ...", in cui "se" introduce l'antecedente e "allora" introduce il conseguente; nella doppia implicazione (DI), al posto di "se" potrebbe trovarsi "se e solo se". Ma non sempre l'antecedente precede il conseguente in un discorso che contenga un ragionamento ipotetico.

Esempi:

(IS) *Se piove [allora] la strada è bagnata*

(DI) *Se e solo se il triangolo T ha tutti gli angoli uguali [allora il triangolo T] è equilatero*

Si noti che: la strada potrebbe essere bagnata anche per altri motivi, per esempio perché è stata innaffiata a scopo di pulizia; il secondo esempio (doppia implicazione) non è una *tautologia*, perché avere gli angoli uguali non fa parte della definizione di triangolo equilatero: si tratta di un teorema vero ma da dimostrare.

Le tavole di verità degli operatori di implicazione semplice e di doppia implicazione sono, rispettivamente

p	q	$p \rightarrow q$	e	p	q	$p \leftrightarrow q$
vero	vero	vero		vero	vero	vero
vero	falso	falso		vero	falso	falso
falso	vero	vero		falso	vero	falso
falso	falso	vero		falso	falso	vero

La proposizione " $p \rightarrow q$ " si legge "*p implica q*", mentre " $p \leftrightarrow q$ " si legge "*p implica strettamente q*" o "*p equivale a q*".

La seconda tabella ci dice che una doppia implicazione è vera solo se l'antecedente e il conseguente sono entrambi veri o entrambi falsi: non a caso, la doppia implicazione viene chiamata anche *equivalenza logica*:

(DI) $p \leftrightarrow q$ è vero [solo] se i valori di verità di antecedente e conseguente sono uguali

Più discutibile può apparire la tavola di verità dell'implicazione semplice:

(IS) $p \rightarrow q$ è falso [solo] se l'antecedente è vero e il conseguente è falso

Le prime due righe non dovrebbero sorprenderci, dato che, anche nel linguaggio informale, "A implica B" significa "se A è vero anche B deve essere vero e non può essere falso". Le ultime due righe, però, ci dicono che l'implicazione semplice, come proposizione complessa, è considerata sempre vera se l'antecedente è falso; forse sarebbe meglio toglierle del tutto quelle due righe dalla tabella, riconoscendo che l'implicazione è un'operazione logica "significativa" (interessante, utile) solo nel caso di un antecedente vero. La convenzione prevalente è invece quella di affermare, con i logici medievali, che "*ex falso sequitur quodlibet*", cioè che "da un antecedente falso si può derivare quel che si vuole"; è un po' come se noi dicessimo, con un'espressione certo meno raffinata, "se mio nonno avesse le ruote sarebbe una carriola".

In italiano, le frasi ipotetiche possono usare congiunzioni o avverbi diversi da “se” e “allora”, spesso portando con sé l’inversione dell’ordine di antecedente e conseguente e la sostituzione di una frase subordinata con una coordinata o indipendente. I due esempi di cui sopra, potrebbero essere riformulati come segue:

(IS) *La strada è [sempre] bagnata in caso di pioggia*

(DI) *Il triangolo T è equilatero perché ha tutti gli angoli uguali; non sarebbe equilatero se non avesse tutti gli angoli uguali*

Le operazioni consentite dall’implicazione

Come nel caso degli altri connettivi logici, anche i connettivi di implicazione ci interessano in quanto che le loro proprietà, quali esse sono definite dalle tavole di verità, possono essere utilizzate all’interno di un’argomentazione. Vediamo in che modo, esaminando le due operazioni da essi consentite.

Affermazione dell’antecedente

Questa operazione ci consente di sostituire l’implicazione con il conseguente quando l’antecedente è vero; ovvero, *se è vera la premessa, è vera anche la conseguenza*; in formule e con un esempio:

$p \rightarrow q, p \vdash q$

Se piove la strada è bagnata

Piove, allora la strada è bagnata

Per motivi storici, l’operazione di affermazione dell’antecedente è anche chiamata *modus ponens*, termine latino - che non cerchiamo di spiegare - corrispondente a quello di una forma di ragionamento o “sillogismo” già studiata da Aristotele.

Negazione del conseguente

Questa operazione ci consente di sostituire l’implicazione con la negazione della premessa quando la conclusione è falsa. Ovvero, *se è falsa la conseguenza, è falsa anche la premessa*; in formule con un esempio:

$p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$

Se Paolo e Maria sono gemelli, [Paolo e Maria] sono fratelli.

Paolo e Maria non sono fratelli, allora [Paolo e Maria] non sono gemelli.

Per motivi storici, l’operazione di negazione del conseguente è anche chiamata *modus tollens*, termine latino - che non cerchiamo di spiegare - corrispondente a quello di un altro sillogismo studiato da Aristotele.

Transitività del nesso condizionale

A partire dalla sua definizione, si può dimostrare che il connettivo condizionale è transitivo:

$(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow r)$

che cioè:

se p implica q e q implica r, allora p implica r.

Esempio:

*Se il tempo è bello vado al mare, Se vado al mare faccio il bagno
dunque,*

Se il tempo è bello faccio il bagno.

Fallacie del ragionamento basato sull'implicazione

In un'altra unità passiamo in rassegna le più comuni classi di errori di ragionamento, o *fallacie*. Richiamiamo qui un paio di esse, che dipendono dal fraintendimento delle proprietà del connettivo logico di implicazione semplice e che consistono nell'esecuzione di operazioni non valide ma simili a quelle consentite.

Negazione dell'antecedente

Questa fallacia consiste nel derivare erroneamente la falsità della conseguenza dalla falsità della premessa; ecco questa fallacia in formule e un suo esempio:

$$p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg q$$

Se piove la strada è bagnata.

Non piove, allora La strada non è bagnata.

Affermazione del conseguente

Questa fallacia consiste nel derivare erroneamente la verità della premessa dalla verità della conseguenza; ecco questa fallacia in formule e un esempio:

$$p \rightarrow q, q \vdash p$$

Se piove la strada è bagnata.

La strada è bagnata, allora Piove.

Il ragionamento ipotetico

I connettivi di implicazione vengono impiegati per modellare certe relazioni di dipendenza tra proposizioni. Le operazioni da esse consentite sono utilizzate per mettere in luce alcune conseguenze, a volte non evidenti, che si possono trarre dagli enunciati semplici che figurano nelle premesse; in questo, i connettivi di implicazione sono simili agli altri connettivi logici che abbiamo esaminato in precedenza, cioè possono essere inseriti in un'argomentazione.

L'uso strumentale del condizionale: la prova condizionale

Le espressioni condizionali possono essere usate nel ragionamento anche in modo strumentale. Riportiamo una presentazione di questo concetto.

L'impiego di argomenti sussidiari comprende il *ragionamento ipotetico*, nel quale supponiamo qualcosa "per amor di discussione", ragioniamo usando la supposizione nello stesso modo in cui ragioniamo in modo non ipotetico ... e quindi, sulla base delle conclusioni ottenute usando la supposizione, traiamo ulteriori conclusioni che non dipendono dalla supposizione ... All'interno della supposizione, ragioniamo come se le proposizioni supposte fossero credenze, usando tutte le regole ... che sono state discusse relativamente al ragionamento lineare. [6, citato in 7]

Un esempio:

*Se piove, o andremo al cinema o vedremo la partita alla TV. Ma tu sei stufo di vedere le partite alla TV.
Quindi se piove andremo al cinema.*

corrisponde alla formula del calcolo proposizionale

$$p \rightarrow (q \vee r), \neg r \vdash p \rightarrow q$$

dove:

come al solito, il simbolo $\vdash$ sta per "dimostra che"
la variabile p corrisponde a "piove"
la variabile q corrisponde a "andremo al cinema"
la variabile r corrisponde a "vedremo la partita in TV"

e, per gentilezza, si interpreta la frase "Ma tu sei stufo di vedere le partite alla TV" come la negazione di r .

Ma noi non sappiamo se piove, cioè non conosciamo se la premessa p è vera; allora come facciamo a dimostrare che la proposizione $p \rightarrow q$ è vera? Il meccanismo della *prova condizionale* è il seguente:

(1) facciamo la *congettura* che piova, cioè consideriamo p vera, a titolo provvisorio, aggiungendola all'elenco delle cose che conosciamo; ma prendiamo nota del fatto che questo costituisce una specie di debito da restituire alla fine

$$p \rightarrow (q \vee r), \neg r, p$$

(2) applicando l'operazione di *Affermazione dell'antecedente* all'insieme dell'implicazione e della congettura p , otteniamo

$$q \vee r, \neg r$$

(3) applicando l'operazione *Eliminazione della Disgiunzione* (si veda l'unità precedente sul *calcolo proposizionale*) otteniamo

$$q$$

(4) cioè, avendo "preso in prestito" la verità di p (congettura), abbiamo dimostrato che è vera q , indipendentemente dalla verità o meno di r ; ora "restituiamo il prestito", scrivendo che q è vera a condizione che sia vera p :

$$p \rightarrow q$$

Il ragionamento controfattuale

Un *controfattuale* è un condizionale il cui antecedente è falso o, comunque, ritenuto falso. [8, citato in 7]
Esempi:

Se l'avessi saputo, non sarei venuto.

Se non avessi perso il treno, sarei arrivato puntuale.

Come in altri casi, la struttura grammaticale dell'antecedente e del conseguente può non essere esplicitata in un testo, ma sta a noi riconoscerla. Per esempio, i due controfattuali di cui sopra potremmo trovarli camuffati come segue:

Averlo saputo, non sarei venuto.

Ho perso il treno, altrimenti sarei arrivato puntuale.

Il ragionamento controfattuale

è rappresentativo della capacità, che gli umani possiedono, di astrarre da alcuni tratti di una situazione che percepiscono come reale, di immaginare delle situazioni alternative a questa, di ragionare all'interno dei confini di tali scenari alternativi ricavando delle informazioni che sono rilevanti per la situazione reale, ma che da questa non potevano essere direttamente inferite. [7]

Il ragionamento per assurdo

Un modo tipico di usare il ragionamento ipotetico è la *dimostrazione per assurdo*.

Giusto un esempio in italiano, senza dilungarci a formalizzarlo; per confutare qualcuno che sostenesse

Tutto è possibile.

si potrebbe argomentare così:

Se tutto fosse possibile, allora sarebbe possibile dimostrare che la tua affermazione è falsa. Ciò genera una contraddizione, quindi non tutto è possibile.

Nella dimostrazione per assurdo - in latino *reductio ad absurdum* - strumentalmente si assume la negazione della conclusione che si cerca di provare; da tale assunzione, si deriva una proposizione che contiene una contraddizione. Ma, per la regola del *modus tollens* (negazione del conseguente), se il conseguente è falso - perché contraddittorio -, deve essere falso anche l'antecedente, proprio quello che, strumentalmente, negava la conclusione che si voleva provare.

BIBLIOGRAFIA E WEBOGRAFIA

- [1] Willy - Liceo Alfano I di Salerno (?), Breve introduzione alla logica, 2016
<http://www.liceoalfano1.gov.it/documenti/category/64-alfano-logico.html?download=375>
- [2] Francesco Piro, L'argomentazione - Invito al pensiero e alla lettura critica, 2015, Fuori commercio – Dispensa ad esclusivo uso didattico
<http://www.liceoalfano1.gov.it/documenti/category/64-alfano-logico.html?download=316>
- [3] Francesco Piro, Manuale di educazione al pensiero critico. Comprendere e argomentare, prefazione di Tullio De Mauro, Editoriale Scientifica, Napoli, 2015, pp.280
- [4] CIDI - Centro di iniziativa democratica degli insegnanti (a cura di), Introduzione alla logica, Editori Riuniti, 1976
- [5] Matematica online – YouMath, Implicazione (2018)
<https://www.youmath.it/domande-a-risposte/view/6992-implicazione-matematica.html>
- [6] John Pollock, Interest driven suppositional reasoning. *Journal of Automated Reasoning*, 6:419-462, 1992
- [7] Roberta Ferrario, Il ragionamento controfattuale: un modello e la sua applicazione al ragionamento pratico (2002), Università di Trento - Technical Report DIT-02-101
- [8] Oxford Companion for Philosophy, Definizione di counterfactual.