1.1 Il calcolo proposizionale

1.2 Un precursore

Ramon Llull (poi italianizzato in Raimondo Lullo), filosofo, teologo, logico e missionario catalano vissuto a cavallo tra l'XI e il XII secolo, vedeva nella conversione degli infedeli una ragione di vita.

L'obiettivo era figlio dei tempi.

Ma l'originalità sta nel metodo, che qui ci interessa molto.

Mentre altri preferivano le maniere forti, Lullo puntava tutto sul ragionamento.

Semplificando molto, il suo punto di vista era questo:

"Ebrei e musulmani credono in un essere del quale si può dire che non ne esiste uno più grande.

Il Dio dei cristiani è l'essere più grande, quindi ebrei e musulmani devono necessariamente diventare cristiani".

Con questa granitica certezza, Lullo aveva elaborato un complicato sistema, chiamato "Ars magna", che consentiva, a suo dire, di dedurre logicamente tutte le possibili verità. Un metodo basato su tabelle e grafici che, per la prima volta, erano supportati da una speciale "macchina" composta da cerchi concentrici rotanti.

Una macchina calcolatrice applicata, non ai numeri, ma al ragionamento, col duplice scopo di:

• distinguere il vero dal falso;

• comunicare efficacemente, superando ogni possibile dubbio.

L'idea non funzionò del tutto. Nel 1308 passò sei mesi in una prigione del Nordafrica prima e di essere espulso. E, secondo la tradizione, nel 1315, a Tunisi, fu gravemente ferito in un’aggressione. Tanto da morire per i postumi poco dopo, non appena tornato a Maiorca.

Di Lullo ci resta l’idea di calcolo meccanico applicato al ragionamento, che nei secoli successivi avrebbe fatto molta strada. Non a caso, Lullo è considerato uno dei padri della logica moderna e, se non il padre, almeno il bisnonno dell’informatica.

E di Lullo ci resta anche la fede incrollabile nella deduzione.

1.3 Il ragionamento deduttivo

Come sappiamo, la deduzione è un tipo di inferenza molto efficace.

“Gli adolescenti trovano noioso fare i compiti. Quindi mia nipote Emma, che è un’adolescente, lo trova noioso.”

Cosa possiamo notare in una frase del genere?

In primo luogo, che date le due premesse, la conclusione è l’unica possibile. Incontestabile.

Il secondo aspetto da notare è che alla fine non abbiamo nessuna nuova informazione: abbiamo solo reso evidente quella già contenuta (implicitamente) nelle premesse.

Il risultato di una deduzione è, letteralmente, una tautologia.

A questo punto, una domanda sorge spontanea:

La deduzione, a che serve?

1.4 Deduzione, igiene della mente

Anche se non ci consente di raggiungere nuove verità, la deduzione preserva quelle che già possediamo. E non è poco!

Utilizzare la deduzione in modo corretto ne fa una specie di igiene della mente.

Possiamo dire che una buona deduzione è una condizione necessaria, anche se non sufficiente, per effettuare buoni ragionamenti.

Rispetto ad altre forme di ragionamento, valutare la bontà di una deduzione è relativamente semplice. Basta verificarne le premesse:

È vero che gli adolescenti (sottinteso, “tutti” gli adolescenti) trovano noioso fare i compiti?

È vero che Emma è un’adolescente?

Per contestare la conclusione dobbiamo contestare le premesse, non il ragionamento in sé.

Possiamo cercare eccezioni alla regola, verificando che effettivamente ci sono adolescenti che adorano passare il pomeriggio tra i libri.

O verifichiamo, documenti alla mano, che Emma, in realtà, ha 35 anni!

Il ragionamento deduttivo è lineare e, in qualche modo, rassicurante. Ed è per questo che le sue regole sono state formalizzate fin dalla Grecia classica, quando l’uomo iniziava a ragionare sul pensiero.

Poi, in età moderna e contemporanea, lo studio del ragionamento deduttivo ha fatto importanti passi avanti, grazie anche al tentativo di “matematizzazione” della logica, prima con Leibniz (che riprendeva alcune idee di Lullo), poi con Boole, Frege, Peano e Russel.

1.5 Il calcolo proposizionale e i suoi limiti

La formalizzazione più semplice del ragionamento deduttivo è il calcolo delle proposizioni, termine che nella logica formale è usato come sinonimo di "enunciati".

Il calcolo proposizionale è valido all’interno di limiti ben precisi.

Prima limitazione: nel calcolo rientrano solo le proposizioni bivalenti. Attenzione: “bivalente” non significa proposizione ambigua o ambivalente, ma solo che può essere vera o falsa, senza vie di mezzo.

Quindi: “Piove” o “Non piove”. Non: “Potrebbe piovere”!

Seconda limitazione: non si tiene conto dei criteri da usare per stabilire se una proposizione è vera o no: plausibilità, consenso, osservazione diretta, tradizione o altro.

Quello che interessa è unicamente il ragionamento in sé, con i suoi meccanismi razionali.

Per questo motivo, ed ecco la terza limitazione, vengono presi in considerazione solo discorsi che hanno una struttura "logica", composti da proposizioni legate da un ristretto insieme di connettivi logici, detti anche “operatori logici”.

Ci serviranno per ragionare, ma anche per la programmazione di computer!

1.6 I connettivi logici

Il calcolo proposizionale definisce il modo con cui, tramite gli operatori (o connettivi) logici:

• si costruiscono proposizioni complesse partendo da proposizioni semplici;

• si ricava la verità (o la falsità) di queste proposizioni complesse.

I connettivi logici non sono molti.

Ecco una tabellina sinottica…

Come puoi vedere, gli operatori che permettono di creare proposizioni complesse a partire da proposizioni semplici corrispondono, nella lingua italiana:

• all'avverbio "non";

• alle congiunzioni "e" e "o", che equivale a “oppure”;

• a espressioni condizionali del tipo “se … allora …”.

Come puoi notare, ciascuno di questi operatori si può esprimere in molti modi oltre che in italiano:

• con simboli logici;

• con simboli ricavati dalla teoria degli insiemi e dell’algebra di Boole;

• con termini mnemonici in inglese (e a volte in latino).

Per ciascun connettivo si può scrivere, con assoluta certezza, se la proposizione risultante è vera o falsa, a partire dalla verità o falsità degli “argomenti, cioè delle proposizioni elementari che ne fanno parte.

Ne risulta una tabella chiamata, con una certa enfasi, “tavola della verità”.

Vediamo di cosa si tratta, analizzando i primi tre connettivi…

1.7 Il connettivo "non" come negazione

Come nel linguaggio corrente, il connettivo “non” trasforma una proposizione vera in una falsa. E viceversa.

La tavola della verità è questa…

La prima colonna indica la verità o falsità della proposizione (indicata, come si usa nella logica formale, con la variabile proposizionale “p”), la seconda indica la negazione di “p”, cioè “non p”.

Questo simbolo significa, appunto “non”.

In alternativa si usa, soprattutto in informatica, l’inglese “NOT”.

In pratica, la negazione coinvolge una sola proposizione. Per esempio:

“Mario è piemontese”.

“Non p” è quindi:

“Mario non è piemontese”.

La tavola della verità, che non tiene conto di nessun particolare Mario, ci dice semplicemente che, quando “p” è vera (Mario è proprio piemontese), è falso “non p”, cioè che Mario non è piemontese.

E che se la “p” è falsa, allora è vera “non p”.

Un’ultima precisazione: per rappresentare i due valori di verità stiamo usando la coppia “vero”/“falso”. Ma nei testi di logica puoi trovare le iniziali “V”/“F”, l’inglese “true”/“false” o i valori binari “1”/“0”.

Tutto semplicissimo, finora.

E adesso complichiamo un po’ le cose…

1.8 La "e" come congiunzione

L'operazione rappresentata in italiano dalla congiunzione “e” è chiamata congiunzione anche nel linguaggio della logica.

La congiunzione mette insieme due o più proposizioni elementari, creando una proposizione complessa che è vera solo quando sono vere tutte le proposizioni che la compongono, come si vede dalla sua tavola della verità…

Questo è il caso più semplice, con due proposizioni elementari chiamate con le variabili proposizionali “p” e “q”. L’ultima colonna ci dice se la congiunzione, indicata con questo simbolo o con l’inglese “AND”, è vera o falsa.

Ecco due proposizioni:

“Mario ha almeno 65 anni”.

“Mario ha versato almeno 35 anni di contributi previdenziali”.

La congiunzione tra “p” e “q” è questa:

“Mario ha almeno 65 anni e ha versato almeno 35 anni di contributi previdenziali”.

Un risultato banale solo a prima vista.

Perché è da questa congiunzione, inserita nelle istruzioni di un computer, che dipende se può andare in pensione o no!

1.9 La "o" come disgiunzione

L'operazione rappresentata in italiano dalla congiunzione “o” (o da “oppure”, che è equivalente) è chiamata disgiunzione.

Ma la sua interpretazione non è così immediata.

Che vuol dire, veramente, “o”?

La prima possibilità è la “disgiunzione inclusiva”, che ha questa tavola della verità:

La proposizione risultante, rappresentata da questo simbolo, è vera quando è vera almeno una delle proposizioni elementari che la compongono.

Per esempio:

“Mario”, sempre lui, “ha un’auto a metano”.

“Mario ha una bicicletta elettrica”.

Qui la disgiunzione inclusiva ci aiuta a capire se, in una domenica ecologica, Mario può usare il suo mezzo di trasporto a motore.

La disgiunzione esclusiva ha una differenza importante.

Come vedi, qui il risultato è vero quando una sola delle proposizioni elementari è vera. Ma non entrambe.

“Mario va al lavoro in auto”.

“Mario va al lavoro in tram”.

La disgiunzione esclusiva ci dice che un certo giorno Mario può andare al lavoro in auto o in tram, ma non contemporaneamente.

Infine c’è una terza possibilità: la disgiunzione di incompatibilità.

In questo caso, il simbolo della barra verticale indica che il risultato è vero anche quando le proposizioni sono entrambe false.

Infatti, usiamo questa disgiunzione quando l’unica cosa che ci interessa è sottolineare l’incompatibilità fra più situazioni:

“Mario o è al lavoro o è in ferie!”

Niente impedisce a Mario di non essere né al lavoro né in ferie, ma in malattia o magari in permesso…

Per concludere, un'ultima osservazione: per costruire le formule del calcolo proposizionale, la disgiunzione esclusiva e la disgiunzione di incompatibilità non sarebbero necessarie. Non a caso, in alcuni linguaggi di programmazione esistono solo "NOT", "AND" e "OR", inteso come "o inclusivo".

Per dimostrare che la disgiunzione esclusiva e la disgiunzione di incompatibilità si possono ricavare con un calcolo, ci facciamo aiutare da un matematico inglese del XIX secolo: Augustus De Morgan…

1.10 Le leggi di De Morgan

Le due Leggi De Morgan consentono di collegare negazioni, congiunzioni e disgiunzioni logiche.

La prima può essere scritta così…

O, usando la notazione dell'algebra di Boole…

Il simbolo NAND, contrazione di NOT AND, indica la disgiunzione di incompatibilità, che si può esprimere usando i soli connettivi logici negazione (NOT) e congiunzione (AND).

Significa, in parole povere, che se due proposizioni non sono entrambe vere, una delle due è falsa.

La seconda Legge di De Morgan si esprime così…

La seconda Legge ci dice che la negazione di una disgiunzione equivale alla congiunzione della negazione dei suoi argomenti.

Da qui si ricava quest'altra equivalenza…

Il simbolo XOR, che sta per "exclusive OR", indica la disgiunzione esclusiva, che si può esprimere usando la negazione (NOT), la congiunzione (AND) e la disgiunzione inclusiva (OR).

Significa che se una disgiunzione esclusiva tra due proposizioni è falsa, entrambe le proposizioni sono false!

Le leggi di De Morgan sono teoremi, cioè si possono dimostrare algebricamente, con una serie di passaggi simbolici, o facendo ricorso alle tavole di verità dei connettivi.

1.11 Decisioni con il calcolo proposizionale

Come abbiamo visto, la formalizzazione di una frase in lingua naturale con i connettivi logici è ovvia con la negazione "non" e la congiunzione "e".

Ma lo è molto meno con la disgiunzione "o", che richiede uno sforzo di interpretazione!

A volte, se non si condividono alcune informazioni di contesto, non è troppo semplice neanche distinguere tra congiunzione e disgiunzione, che hanno conseguenze molto diverse.

Ritorniamo all'esempio:

"Mario ha almeno 65 anni".

"Mario ha versato almeno 35 anni di contributi previdenziali".

e prescindiamo dal singolo caso.

Se, per decidere chi ha diritto alla pensione, scriviamo un programma che considera le due proposizioni in "AND", collegandole quindi con una congiunzione, Mario andrà in pensione insieme a tutti quelli che stanno nelle stesse condizioni.

Ma se le mettiamo in OR, con la disgiunzione inclusiva, oltre a Mario andranno in pensione tutti quelli che hanno almeno 65 anni più tutti quelli che hanno almeno 35 anni di contributi.

E se le mettiamo in OR esclusivo?

Allora dalla pensione saranno esclusi proprio quelli che ne avrebbero più diritto: gli ultra sessantacinquenni con 35 anni o più di contributi!

Quindi, il calcolo proposizionale ha una grande utilità pratica per ragionare e decidere.

E ora vediamo quali operazioni possiamo effettuare con i connettori logici che abbiamo incontrato fin qui…

1.12 Ragionare con il calcolo proposizionale

Ora proviamo ad applicare il calcolo proposizionale al ragionamento.

Anche in questo caso ci serviamo di una tabella sinottica. È un po' complessa, ma fornisce una comoda vista d'insieme.

Qui incontriamo un nuovo simbolo " ├", che sta per "dimostra". Ci serve per dire cosa è lecito fare con la logica proposizionale.

Cioè come possiamo riscrivere le proposizioni per esplicitare verità nascoste o ri-formularle con parafrasi.

Come vedi, la tabella mostra diverse operazioni di riscrittura. Tutte lecite:

• Eliminazione della doppia negazione.

Infatti una doppia negazione afferma:

"È falso che Mario non ha 65 anni" dimostra che Mario ha proprio 65 anni.

• Introduzione della congiunzione.

"Mario ha un'automobile", "Mario ha una bicicletta".

Se le due proposizioni sono vere, lo è anche la loro congiunzione.

"Mario ha un'automobile e una bicicletta".

• Eliminazione della congiunzione.

È l'inverso della precedente: se la congiunzione di più proposizioni è vera, lo sono anche tutte le singole proposizioni.

• Introduzione della disgiunzione.

Se una proposizione è vera ed è inserita in una disgiunzione, la disgiunzione è vera a prescindere dalle altre proposizioni che ne fanno parte.

Significa che, dato che Mario ha un'automobile, anche la proposizione "Mario ha un'automobile o una bicicletta” è vera.

E lo sarebbero anche “Mario ha un’automobile o se ne resta a casa tutto il fine settimana” e tutte le proposizioni che iniziano con “Mario ha un’automobile o…”.

• Eliminazione della disgiunzione.

Se è vera una proposizione formata con una disgiunzione e se è noto che una delle proposizioni elementari è falsa, l’altra è sicuramente vera.

Mario è venuto in treno o in auto. Ma sicuramente Mario non è venuto in auto. Allora è venuto in treno.

Per ciascuna delle operazioni di riscrittura, il fatto che siano lecite costituisce un teorema, perché si preserva il valore di verità. E questo è dimostrabile sulla base degli assunti del calcolo proposizionale.

Potremmo, per esempio, calcolare la tavola di verità dell’intera formula a partire da quelle dei connettivi che sono stati usati.

1.13 Tecniche di base per leggere e capire

Uno dei principali obiettivi dello studio del ragionamento è abituarsi alla lettura critica per essere in grado di estrarre l’informazione contenuta in un testo.

Per il lettore, questo significa, per esempio:

• distinguere le informazioni date esplicitamente e quelle lasciate implicite;

• riconoscere le inferenze che l’autore vuole suggerire;

• fare altre inferenze di propria iniziativa.

Ecco alcuni tipi di elaborazione, che entro certi limiti è possibile automatizzare:

• La segmentazione del testo in frasi, considerando soprattutto i segni di interpunzione ed eventualmente la disposizione del testo nella pagina o sullo schermo.

• La classificazione delle parole in parti del discorso o categorie grammaticali (chiamata POS-tagging, da POS che sta per “parts of speech”).

• L’estrazione dei frammenti più significativi della frase, corrispondenti per lo più a unità di informazione, dette “chunk”, nominali e verbali.

• La ricostruzione della struttura completa del testo, mediante la tradizionale analisi sintattica (o analisi per costituenti), che consente di disegnare un albero sintattico, nel quale la radice rappresenta l’intera frase e ogni nodo un costituente intermedio (frasi verbali, nominali, preposizionali, ecc.).

• L’analisi di dipendenza, cioè la ricostruzione della struttura logica del testo in termini di legami tra parole.

È una tecnica che richiede una conoscenza approfondita del lessico: non solo delle parole grammaticali (soprattutto congiunzioni e preposizioni), ma anche delle parole lessicali (come verbi e nomi), ciascuna delle quali è caratterizzata dalla sua valenza, cioè dal numero e dal tipo dei legami con altri elementi del testo (come i complementi) che ne completano il significato.

1.14 Riformulare il testo

Un primo passo per capire un testo può essere quello di riscriverlo in forma semplificata.

Questo, per esempio, è un brano di un articolo di cronaca…

Ed ecco come potremmo riscriverlo…

Come puoi notare abbiamo:

• riscritto le frasi subordinate come frasi indipendenti;

• esplicitato la co-referenzialità, cioè il fatto che la maggior parte delle informazioni si riferiscono allo stesso individuo, ripetendo il suo nome fino alla noia.

Se fosse stato utile, avremmo potuto anche spezzare frasi coordinate e sostituire le parole difficili con altre di uso comune o con parafrasi.

Alla fine abbiamo ottenuto un insieme di frasi dichiarative, o proposizioni, che, prestando fede all'autore, possiamo considerare vere.

Se disponiamo di alcune premesse di carattere generale (per esempio, che un primo ministro abbrevia un viaggio solo se è molto preoccupato), possiamo permetterci alcune inferenze. Per esempio:

• Putin è molto preoccupato per la situazione.

• Putin teme per la sua immagine di uomo forte.

E così via, fino a farci un'idea, personale ma rigorosa, sulla situazione.